PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB SISI KUAT PADA GABUNGAN DUA GRAF SIKEL

Dominikus Arif Budi Prasetyo
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma
email: dominic_abp@usd.ac.id

Abstract

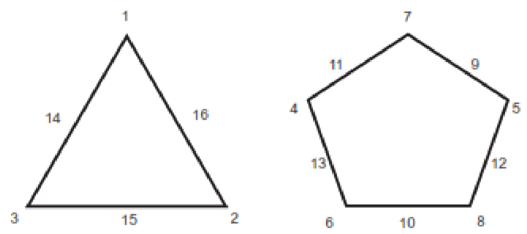
Pelabelan graf merupakan salah satu bagian dari teori graf. Pelabelan total adalah pemetaan bijektif seluruh unsur graf ke himpunan bilangan asli $\{1,2,\dots,|v|+|e|\}$ *dengan titik* $|v|$ *dan* $|e|$ *berturut-turut banyaknya titik dan sisi. Pelabelan total tak ajaib sisi kuat* (a,d) *adalah pelabelan total dengan label-label titiknya adalah anggota himpunan bilangan* $\{1,2,\dots,|v|\}$ *dan bobot sisi-sisinya membentuk barisan aritmetika dengan suku awal a dan selisih d. Bobot dari sisi diperoleh dengan menjumlahkan label sisi dan label-label titik yang terkait dengan sisi tersebut. Gabungan dua graf sikel adalah penggabungan dua buah sikel yang tidak terhubung dan dinyatakan sebagai* $C_m \cup C_n$ *dengan m dan n berturut-turut menyatakan banyaknya titik pada sikel pertama dan sikel kedua. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat* (a,d) *pada graf* $C_m \cup C_n$ *dan batasan nilai a dan d serta pola pelabelannya. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka dengan mengkaji beberapa hasil penelitian sebelumnya. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf* $C_m \cup C_n$ *berlaku pelabelan total tak-ajaib sisi kuat* (a,d). *Pelabelan pada gabungan dua graf sikel yang berhasil ditemukan adalah pelabelan total tak-ajaib sisi kuat* $(2m+2n+2,1)$ *dan* $\left(\frac{3m+3n+5}{2},2\right)$.

Kata kunci: *Gabungan dua graf sikel, Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat, dan Pola Pelabelan.*

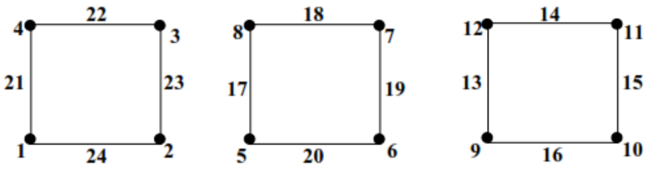
1. PENDAHULUAN

Salah satu bidang kajian pada teori graf yang masih dikembangkan saat ini adalah pelabelan graf [1]. Dalam hal ini, pelabelan graf diartikan sebagai suatu pemetaan satu-satu dari unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke sekumpulan bilangan bulat positif. Pelabelan ini dilakukan pada graf sederhana dan tak berarah. Kotzig dan Rosa [2] mengenalkan pelabelan graf sebagai cara memberikan label pada unsur-unsur sebuah graf dengan bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan sebanyak unsur graf yang akan diberi label dan menghasilkan bobot setiap titik atau setiap sisinya yang dievaluasi sama.

Selanjutnya, pelabelan total tak-ajaib sisi dikenalkan oleh Baca, dkk [3] sebagai fungsi bijektif yang memetakan setiap unsur graf ke bilangan bulat positif dengan bobot semua titik atau semua sisinya berbeda dan membentuk barisan aritmetika naik. Terkait dengan pelabelan kuat, Wallis [4] menyebutkan bahwa pelabelan kuat sebagai pelabelan yang memberikan label $\{1, 2, 3, \dots, |v|\}$ pada titik-titik dari graf yang dilabeli. Kajian mengenai pelabelan total tak-ajaib sisi kuat telah dilakukan oleh Sanjaya. Sanjaya [5] telah meneliti tentang keberlakuan pelabelan total takajaib sisi kuat pada graf multisikel. Sedangkan Prasetyo [6] telah mengkaji pelabelan total takajaib titik kuat pada gabungan dua graf sikel.



Gambar 1. Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Kuat (26,1) pada $C_3 \cup C_5$



Gambar 2. Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat (26,1) pada $3C_4$

Pada artikel ini, penulis menggabungkan kajian yang telah dilakukan Sanjaya [5] dan Prasetyo [6] dengan mengkaji keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat pada gabungan dua graf sikel.

2. KAJIAN LITERATUR

Sebelum mengkaji keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat pada gabungan dua graf sikel, berikut ini disajikan beberapa kajian yang terkait.

Definisi 1 (Baca, dkk [3])
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib sisi pada graf G(p,q) jika bobot dari setiap sisinya berbeda.

Bobot sisi uv dihitung dengan menjumlahkan label sisi dan label dua titik yang terhubung dengan sisi tersebut, yakni $w_f(uv) = f(u) + f(u) + f(uv)$, untuk setiap $u, v \in V(G)$ dan $uv \in E(G)$.

Definisi 2 (Baca, dkk [3])
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib sisi (a, d) pada graf $G(p,q)$ jika bobot dari setiap sisinya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama a dan beda d.

$$W = \{w_f(u) \mid u \in V\}$$
$$= \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(p-1)d\}.$$

Dari Definisi 1 dan Definisi 2, Baca [3] juga mengatakan bahwa pelabelan total takajaib tersebut juga berlaku pada titik sebagai unsur yang dievaluasi.

Definisi 3 (Wallis [6])
Misalkan terdapat pelabelan pada graf G(V,E). Pelabelan dikatakan kuat jika label titik-titiknya berupa bilangan dari himpunan {1, 2, 3, …, |v|}.

Berikut ini disajikan beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) pada gabungan dua graf sikel dan pelabelan total takajaib sisi pada graf multisikel.

Teorema 4. (Prasetyo [5])
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m, n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $(3m + 3n + 2, 1)$.

Teorema 5 (Prasetyo [5])
Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk $m, n \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik kuat $\left(\frac{5m + 5n + 5}{2}, 2\right)$.

Teorema 6 (Sanjaya [4])
Pada graf multisikel mC_p untuk $m \geq 1$ dan $p \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2mp + 2, 1)$.

Teorema 7 (Sanjaya [4])
Pada graf multisikel $3C_p$ untuk $p \geq 3$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{9p + 5}{2}, 2\right)$.

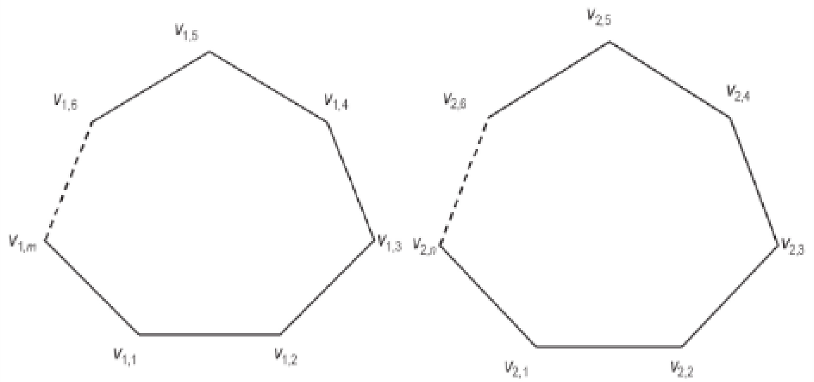
3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi pustaka dengan melakukan pengkajian dari beberapa hasil penelitian yang terkait sebelumnya. Kajian ini menggabungkan kajian yang telah dilakukan Sanjaya [4] dan Prasetyo [5] yang telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (a, d) pada graf multisikel dan pelabelan total takajaib titik kuat pada gabungan dua graf sikel dengan hasil pada Teorema 4, Teorema 5, Teorema 6, dan Teorema 7.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Definisi 1 untuk memperoleh jumlahan bobot sisi pada pelabelan total tak-ajaib sisi, label semua sisi dihitung sebanyak dua kali dan label semua titik dihitung satu kali. Hal tersebut berakibat jumlahan bobot semua sisi adalah $S_W = 2S_V + S_e$, dimana S_w adalah jumlahan semua bobot sisi, S_v adalah jumlahan label semua titik dan S_e adalah jumlahan label semua sisi.

Prasetyo [5] mengkaji gabungan dua graf sikel dengan menggabungkan dua buah graf sikel dimana kedua graf tersebut tidak terhubung. Kajian graf tersebut disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Gabungan Dua Graf Sikel $C_m \cup C_n$ (Prasetyo [5])

Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$, terdapat sebanyak $m+n$ titik dan sebanyak $m+n$ sisi. Sehingga berdasarkan Definisi 2 diperoleh bahwa:

$$a+(a+d)+\cdots+(a+(m+n-1)d)=2S_v+S_e$$

$$(m+n)a+\frac{(m+n)(m+n-1)d}{2}=2S_v+S_e \quad (1)$$

Dari Definisi 3, diperoleh bahwa label titiknya $\{1,2,\cdots,m+n\}$, maka label sisinya adalah $\{m+n+1, m+n+2,\cdots,2m+2n\}$. Akibatnya diperoleh $S_v=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ dan $S_e=\frac{(m+n)(3m+3n+1)}{2}$. (2)

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) diperoleh bahwa

$$a+\frac{(m+n-1)d}{2}=m+n+1+\frac{3m+3n+1}{2}$$

$$2a+(m+n-1)d=5m5n+3 \quad (3)$$

Sekarang kita tentukan nilai a terkecil, yakni m + n + 4 karena pada pelabelan total takajaib sisi kuat. Jadi diperoleh bahwa $a \geq m+n+4$. Hasil ini disubstusikan ke persamaan (3) dan diperoleh pertidaksamaan untuk nilai *d*.

$$5m+5n+3-(m+n-1)d \geq 2m+2n+8$$

$$d \leq 3$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai-nilai a berdasarkan nilai d yang terkait.

a. Untuk nilai d = 1.

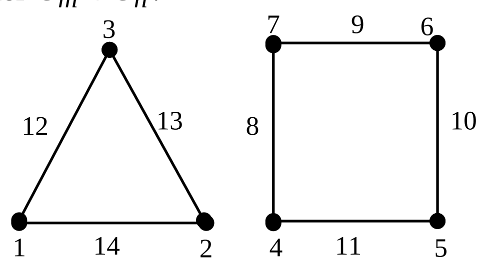
Berdasarkan persamaan (3) diperoleh bahwa nilai a adalah

$$a=\frac{5m+5n+3-(m+n-1)}{2}$$

$$=2m+2n+2$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq m+n+4$ sehingga pelabelan bisa dilakukan pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk pelabelan total takajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$

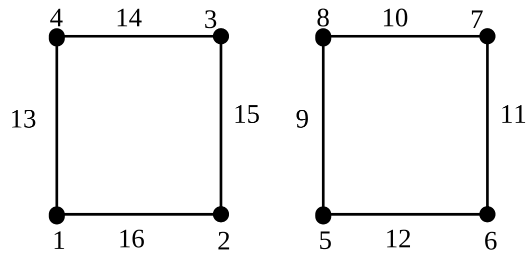
Berikut ini pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$ pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.



Gambar 4. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (16, 1) pada $(C_3 \cup C_4)$

Dari pelabelan pada Gambar 4 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan label titiknya $\{8,9,10,11,12,13,14\}$. Bobot masing-masing sisinya adalah $\{16,17,18,19,20,21,22\}$, yakni bobot sisi dengan label 8 adalah 4+7+8 = 19, bobot sisi dengan label 9 adalah 6+7+9 = 22, bobot sisi dengan label 10 adalah 5+6+10 = 21, bobot sisi dengan label 11 adalah 4+5+11 = 20, bobot sisi dengan label 12 adalah 1+3+12 = 16, bobot sisi dengan label 13 adalah 2+3+13 = 18, dan bobot sisi dengan label 14 adalah 1+2+14 = 17.

Selanjutnya diberikan contoh pelabelan untuk $(C_4 \cup C_4)$.



Gambar 5. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (18, 1) pada $(C_4 \cup C_4)$

Dari pelabelan pada Gambar 5 diperoleh bahwa label titiknya $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dan label titiknya $\{9,10,11,12,13,14,15,16\}$. Bobot masing-masing sisinya adalah $\{18,19,20,21,22,23,24,25\}$, yakni bobot sisi dengan label 9 adalah 5+8+9 = 22, bobot sisi dengan label 10 adalah 7+8+10 = 25, bobot sisi dengan label 11 adalah 6+7+11 = 24, bobot sisi dengan label 12 adalah 5+6+12 = 23, bobot sisi dengan label 13 adalah 1+4+13 = 18, bobot sisi dengan label 14 adalah 3+4+14 = 21, bobot sisi dengan label 15 adalah 2+3+15 = 20, dan bobot sisi dengan label 16 adalah 1+2+16 = 19.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diketahui bahwa pada semua gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2,1)$ untuk semua $m,n \geq 3$. Misalkan fungsi pelabelan tersebut adalah f untuk graf pertaman dan g untuk graf kedua, maka diperoleh konsistensi rumus f untuk label titik graf pertama adalah $f(v_{1,i}) = i$ dengan $i = 1,2,\cdots,m$ dan rumus g untuk label titik graf kedua adalah $g(v_{2,j}) = m + j$ dengan $j = 1,2,\cdots,n$. Sedangkan rumus f untuk label sisi graf pertama adalah $f(v_{1,1}v_{1,m}) = m + 2n + 1$ dan $f(v_{1,i}v_{1,i+1}) = 2m + 2n + 1 - i$ dengan $i = 1,2,\cdots,m-1$, $f(v_1) = 2p + 4$ dan rumus g untuk label sisi graf kedua adalah $g(v_{2,1}v_{2,n}) = m + n + 1$, dan $g(v_{2,j}v_{2,j+1}) = m + 2n + 1 - j$ untuk $j = 1,2,\cdots,n-1$.

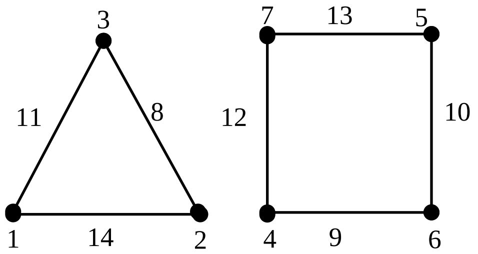
b. Untuk nilai d = 2.

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh bahwa nilai a adalah

$$a = \frac{5m + 5n + 3 - 2(m + n - 1)}{2}$$
$$= \frac{3m + 3n + 5}{2}$$

Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq m + n + 4$ sehingga pelabelan bisa dilakukan pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ untuk pelabelan total takajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2}, 2\right)$. Nilai a ini akan diperoleh berupa bilangan bulat jika m dan n salah satunya ganjil.

Berikut ini pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2}, 2\right)$ pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.



Gambar 6. Pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (13, 2) pada $(C_3 \cup C_4)$

Dari pelabelan pada Gambar 6 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan label titiknya $\{8,9,10,11,12,13,14\}$. Bobot masing-masing sisinya adalah $\{13,15,17,19,21,23,25\}$, yakni bobot sisi dengan label 8 adalah 2+3+8 = 13, bobot sisi dengan label 9 adalah 4+6+9 = 19, bobot sisi dengan label 10 adalah 5+6+10 = 21, bobot sisi dengan label 11 adalah 1+3+11 = 15, bobot sisi dengan label 12 adalah 4+7+12 = 23, bobot sisi dengan label 13 adalah 5+7+13 = 25, dan bobot sisi dengan label 14 adalah 1+2+14 = 17.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diketahui bahwa pada semua gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $\left(\frac{3m+3n+5}{2}, 2\right)$ untuk $m, n \geq 3$ dengan salah satu dari *m* atau *n* ganjil. Sampai sejauh ini, rumus pelabelannya belum dapat ditemukan secara tepat.

c. Untuk nilai *d* = 3.

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh bahwa nilai *a* adalah

$$a = \frac{5m+5n+3-3(m+n-1)}{2}$$
$$= m+n+3$$

Hasil ini bertentangan dengan syarat sebelumnya bahwa $a \geq m+n+4$ sehingga pelabelan tidak bisa dilakukan pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.

5. KESIMPULAN

Pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib sisi kuat (*a*, *d*). Pelabelan yang dapat dilakukan adalah pelabelan total tak-ajaib sisi kuat $(2m+2n+2, 1)$ untuk semua $m, n \geq 3$ dan $\left(\frac{3m+3n+5}{2}, 2\right)$ untuk $m, n \geq 3$ dengan salah satu dari *m* atau *n* ganjil.

Pembaca yang tertarik dengan pelabelan ini dapat melanjutkan dengan pelabelan pada graf lain atau pelabelan lain pada gabungan dua graf sikel $C_m \cup C_n$.

6. REFERENSI

[1] Gallian, J.A, 2017. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics. #DS6.

[2] Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canad. Math. Bull

[3] Baca, M., dkk. 2003. *Vertex-Antimagic Total Labelings of Graphs*. Discussiones Mathematicae. Graph Theory 23 P. 67-83.

[4] Wallis, W. (2001). *Magic Graph*. Birkhauser.

[5] Sanjaya, Ryan. (2013). *Pelabelan Total Tak-ajaib Sisi Kuat pada Graf Multisikel* (mC_p). Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

[6] Prasetyo, D. Arif Budi. (2018). *Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Super pada Gabungan Dua Graf Sikel*. Jurnal Penelitian. Volume 22, No. 1, Mei 2018 hlm. 44-50.