PEMODELAN MATEMATIKA DENGAN MENGGUNAKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA PERTUMBUHAN PENDUDUK DI INDONESIA

Ayyubi Ahmad
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Terapan
Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta
email: ayyubiahmad1@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini menjelaskan tentang bagaimana menentukan model untuk masalah pertumbuhan penduduk di Indonesia. Pada penelitian ini, penulis menggunakan data dari BPS (Badan Pusat Statistik). Penulis mengambil data pada tahun 1980 – 2010. Dalam pembahasan ini penulis menggunakan pemodelan dengan menggunakan persamaan diferensial yaitu model populasi eksponensial dan model populasi logistik. Pada metode eksponensial terlebih dahulu mengasumsikan bahwa P_0 *adalah populasi awal dan t adalah waktu (diukur dalam tahun) serta k adalah sebuah konstanta positif. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa model eksponensial yang dipilih adalah model eksponensial III dengan bentuk persamaan* $P(t) = 147.490.298e^{0,01590000353(t-t_0)}$ *dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah* 1,6% *per tahunnya. Pada metode logistik diasumsikan M adalah populasi maksimum, r adalah sebuah konstanta, dan* t^**adalah waktu ketika populasi P mencapai setengah nilai batas dan memiliki bentuk persamaan* $P(t) = \frac{267.019.578,1}{[1+(0,8104213072)e^{-0,6028693192t}]}$. *Prediksi jumlah penduduk Indonesia pada sensus 2020 berdasarkan hasil dari model populasi eksponensial sebesar 278.595.954 jiwa, sedangkan dari model populasi logistik sebesar 248.927.344,7 jiwa. Dengan demikian berdasarkan hasil galat nyata dari model pertumbuhan, model populasi eksponensial memiliki galat nyata lebih kecil daripada model populasi logistik. Sehingga untuk memprediksi pertumbuhan penduduk di Indonesia mendatang lebih baik menggunakan model populasi eksponensial karena hasilnya lebih akurat.*

Kata Kunci: *Model Pertumbuhan Populasi, Persamaan Diferensial, Model Eksponensial, Model Logistik*

1. PENDAHULUAN

Pertumbuhan penduduk di Indonesia tiap tahunnya semakin meningkat yang dimana hal ini menjadi masalah yang sangat populer. Pertumbuhan penduduk yang tidak terkontrol dengan baik akan mempengaruhi berbagai aspek kehidupan ekonomi maupun sosial, terutama peningkatan mutu kehidupan atau kualitas penduduk dalam sumber daya manusia, penyediaan anggaran, fasilitas kesehatan, pendidikan, dan ketersediaan pangan.

Kondisi ini menjadi masalah besar bagi Indonesia sebagai salah satu negara yang memiliki penduduk terbesar keempat setelah negara Cina, India, dan Amerika Serikat. Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistik (BPS) bahwa jumlah penduduk Indonesia dari tahun 1980 hingga 2010 kian meningkat, dari 147.490.298 jiwa di tahun 1980 terus meningkat menjadi 237.641.326 jiwa pada tahun 2010 dan juga diperkirakan jumlah penduduk Indonesia mencapai 271 juta jiwa pada tahun 2020. Dengan adanya hal ini kita perlu suatu cara untuk memprediksi pertumbuhan penduduk beberapa tahun yang akan datang dengan menggunakan pemodelan dalam matematika.

Model merupakan suatu bentuk abstrak yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang ada di kehidupan sehari-hari. Meskipun tidak semua masalah dapat dimodelkan secara matematis, tetapi masalah-masalah tersebut dapat direduksi dengan asumsi-asumsi yang sesuai dengan kondisi nyata sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk abstrak. Salah satu penerapan pemodelan matematika adalah pemodelan pada pertumbuhan populasi. Dalam hal ini kita menggunakan pemodelan pertumbuhan populasi dengan persamaan diferensial yang bertujuan untuk memprediksi jumlah penduduk Indonesia pada masa yang akan datang dengan menggunakan data-data tahun sebelumnya.

2. KAJIAN LITERATUR

Kita selalu memiliki informasi yang berhubungan dengan tingkat perubahan dari variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas dan tertarik menemukan fungsi yang berhubungan dengan variabel.

Jika P menunjukkan jumlah manusia dalam populasi besar pada waktu t, maka itu dapat diasumsikan bahwa tingkat perubahan dari populasi terhadap waktu yang bergantung pada ukuran P saat ini. Jika ukuran populasi saat ini dinyatakan dengan $P(t)$ dan ukuran populasi saat waktu $t+\Delta t$ adalah $P(t+\Delta t)$, maka perubahan pada populasi ΔP selama periode waktu Δt adalah

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) \qquad (1.1)$$

Asumsikan $\Delta P \propto P$. Jika imigrasi, emigrasi, usia, dan jenis kelamin diabaikan, kita dapat mengasumsikan bahwa selama periode waktu, persentase tertentu dari populasi kelahiran dan populasi kematian. Nyatakan k sebagai ekspresi persentase per waktu. Maka diperoleh

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = kP\Delta t \qquad (1.2)$$

Kita asumsikan bahwa t kontinu bervariasi maka

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = kP$$

dimana $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ menunjukkan *rata-rata tingkat perubahan* di P selama periode waktu Δt. Selanjutnya, Δt mendekati nol, definisi derivatif memberikan persamaan diferensial

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = kP \qquad (1.3)$$

dimana $\frac{dP}{dt}$ menunjukkan *tingkat perubahan seketika.*

Sekarang asumsikan bahwa selama periode waktu kecil, persentase b dari populasi kelahiran. Demikian pula, persentase c dari populasi kematian. Maka,

$$P(t+\Delta t) = P(t) + bP(t)\Delta t - cP(t)\Delta t$$

atau

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = bP - cP = kP$$

Dari asumsi yang kita miliki rata-rata tingkat perubahan dari populasi atas sebuah interval waktu sebanding dengan ukuran populasi. Menggunakan tingkat perubahan seketika untuk mengaproksimasi rata-rata tingkat perubahan, kita mempunyai model persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad P(t_0) = P_0, \quad t_0 \le t \le t_1 \quad (1.4)$$

dimana k adalah konstanta positif.

Kemudian kita memisahkan variabel-variabel dan memindahkan semua bagian mengakibatkan P dan dP menjadi satu sisi dari persamaan dan semua bagian di t dan dt ke yang lain.

$$\frac{dP}{P} = k\,dt$$

Integralkan kedua sisi dari persamaan terakhir ini sehingga menghasilkan

$$\ln P = kt + C \qquad (1.5)$$

Menggunakan kondisi $P(t_0) = P_0$ ke persamaan (1.5) untuk menemukan C

$$\ln P_0 = kt_0 + C$$

atau

$$C = \ln P_0 - kt_0$$

Maka, substitusikan C ke dalam persamaan (1.5) diperoleh

$$\ln P = kt + \ln P_0 - kt_0$$

atau

$$\ln \frac{P}{P_0} = k(t - t_0)$$

Lalu dengan eksponensialkan kedua sisi dari persamaan sebelumnya dan kalikan hasilnya dengan P_0, kita peroleh solusi

$$e^{\ln \frac{P}{P_0}} = e^{k(t-t_0)}$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{k(t-t_0)}$$

$$\boldsymbol{P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}} \qquad (1.6)$$

Persamaan (1.6) disebut sebagai **model Malthusian dari pertumbuhan populasi**, memprediksi bahwa pertumbuhan populasi secara eksponensial dengan waktu.

Sekarang menentukan bahwa faktor k, mengukur tingkat pertumbuhan populasi pada persamaan (1.4), tidak lagi konstanta tetapi sebuah fungsi dari populasi. Karena fungsi meningkat dan semakin mendekati populasi maksimum

M, tingkat k menurun. Satu submodel sederhana untuk k adalah

$$k = r(M - P), \qquad r > 0$$

dimana r adalah konstanta. Substitusikan ke dalam persamaan (1.4) menghasilkan

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P \qquad (1.7)$$

atau

$$\frac{dP}{P(M - P)} = r\,dt \qquad (1.8)$$

Asumsikan kondisi awal $P(t_0) = P_0$.

$$\frac{1}{P(M - P)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}\right)$$

Jadi, persamaan (1.8) dapat ditulis kembali seperti

$$\frac{dP}{P} + \frac{dP}{M - P} = rM\,dt$$

diintegralkan menjadi

$$\ln P - \ln|M - P| = rMt + C \qquad (1.9)$$

Menggunakan kondisi awal, kita menghitung C dalam kasus $P < M$:

$$C = \ln\frac{P_0}{M - P_0} - rMt_0$$

Substitusikan ke dalam persamaan (1.9) diperoleh

$$\ln\frac{P(M - P_0)}{P_0(M - P)} = rM(t - t_0)$$

Eksponensialkan kedua ruas,

$$\frac{P(M - P_0)}{P_0(M - P)} = e^{rM(t - t_0)}$$

atau

$$P_0(M - P)e^{rM(t - t_0)} = P(M - P_0)$$

Jadi,

$$P_0Me^{rM(t - t_0)} = P(M - P_0) + P_0Pe^{rM(t - t_0)}$$

maka penyelesaian untuk populasi P,

$$P(t) = \frac{P_0Me^{rM(t - t_0)}}{M - P_0 + P_0e^{rM(t - t_0)}}$$

untuk estimasi P karena $t \to \infty$, dapat ditulis kembali persamaan terakhir ini menjadi

$$P(t) = \frac{P_0M}{[P_0 + (M - P_0)e^{-rM(t - t_0)}]} \qquad (1.10)$$

Jadi, **persamaan logistiknya** adalah

$$\boldsymbol{P(t) = \frac{M}{\left[1 + \left(\frac{M}{P_0} - 1\right)e^{-rt}\right]}} \qquad (1.11)$$

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian kepustakaan yaitu serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca, dan mencatat serta mengolah bahan penelitian.

3.1 Objek penelitian

Populasi data yang digunakan dalam penelitian adalah seluruh penduduk di Indonesia. Sampel yang digunakan adalah data jumlah populasi penduduk Indonesia pada tahun 1980 – 2010.

3.2 Tempat Penelitian

Tempat penelitian: Perpustakaan Kampus 4 Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta.

Waktu penelitian: 18 – 20 April 2019

3.3 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah penduduk Indonesia pada tahun 1980 – 2010. Penduduk merupakan sekelompok orang yang berdomisili di wilayah geografis suatu negara yang bertujuan menetap.

3.4 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian ini adalah dimulai dengan menentukan model yang akan dipakai untuk memproses estimasi jumlah penduduk Indonesia. Kemudian mencari dan mengumpulkan data dari berbagai sumber baik dari buku maupun internet. Selanjutnya memproses data tersebut dengan menggunakan model yang telah dimiliki. Setelah data diproses maka diperoleh hasil prediksi jumlah penduduk Indonesia.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian diperoleh jumlah penduduk Indonesia dari hasil sensus penduduk pada tahun 1980-2010. Berikut Tabel 1 yang menyatakan jumlah penduduk Indonesia.

Tabel.1 Jumlah populasi penduduk Indonesia

Tahun	Populasi
1980	147.490.298
1990	179.378.946
2000	206.264.595
2010	237.641.326

a. Penyelesaian dengan Model Populasi Eksponensial

Kita asumsikan terlebih dahulu bahwa waktu (t) diukur dalam tahun dan dimisalkan $t = 0$ pada tahun 1980. Maka populasi awal adalah $P(0) = 147.490.298$, sehingga diperoleh bentuk umum penyelesaiannya adalah:

$$P(t) = 147.490.298e^{k(t-t_0)}$$

Sebelumnya, kita mencari nilai k setiap tahunnya terlebih dahulu yaitu:

- Untuk tahun 1980-1990 (model eksponensial I)
$$k = \left(\frac{1}{10}\right)\ln\frac{179.378.946}{147.490.298} = 0{,}01957381875$$
- Untuk tahun 1980-2000 (model eksponensial II)
$$k = \left(\frac{1}{20}\right)\ln\frac{206.264.595}{147.490.298} = 0{,}01676986945$$
- Untuk tahun 1980-2010 (model eksponensial III)
$$k = \left(\frac{1}{30}\right)\ln\frac{237.641.326}{147.490.298} = 0{,}01590000353$$

Berikut hasil dari model populasi eksponensial:

1. Model eksponensial I
Bentuk persamaannya:
$$P(t) = 147.490.298e^{0{,}01957381875(t-t_0)}$$
dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah 2% per tahunnya.
2. Model eksponensial II
Bentuk persamaannya:
$$P(t) = 147.490.298e^{0{,}01676986945(t-t_0)}$$
dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah 1,7% per tahunnya.
3. Model eksponensial III
Bentuk persamaannya:
$$P(t) = 147.490.298e^{0{,}01590000353(t-t_0)}$$
dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah 1,6% per tahunnya.

Dari hasil di atas penulis menggunakan hasil dari model eksponensial III, karena model eksponensial III paling akurat di antara model eksponensial lainnya.

b. Penyelesaian dengan Model Populasi Logistik

Dengan asumsi yang sama untuk waktu (t) dan populasi awal P_0 serta jumlah populasi maksimumnya adalah 267.019.578,1 didapat dari

$$P_{maks} = \lim_{t\to\infty} P = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{{P_1}^2 - P_0P_2}$$

Laju pertumbuhan penduduk Indonesia diperoleh dengan mensubstitusikan nilai P_0, P_1, dan P_2 ke dalam persamaan

$$r = \frac{P_0(P_2-P_1)}{P_2(P_1-P_0)} = 0{,}6028693192,$$

sehingga diperoleh bentuk umum penyelesaiannya adalah

$$P(t) = \frac{267.019.578{,}1}{[1 + (0{,}8104213072)e^{-0{,}6028693192t}]}$$

Perbandingan hasil dari model populasi eksponensial dan model populasi logistik adalah sebagai berikut:

Tabel.2 Perbandingan hasil sensus penduduk Indonesia

Tahun	Sensus	Model Eksponensial	Model Logistik
1980	147.490.298	147.490.298	147.490.298
1990	179.378.946	172.908.479,2	184.981.388,6
2000	206.264.595	202.707.178,6	214.870.947,1
2010	237.641.326	237.641.326	235.713.615,4

Berdasarkan Tabel 2 di atas model eksponensial dan logistik dapat digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk Indonesia pada tahun 2020. Prediksi jumlah penduduk Indonesia pada tahun 2020 dengan menggunakan model populasi eksponensial sebesar *278.595.954* jiwa dan pada model populasi logistik sebesar *248.927.344,7* jiwa.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Penerapan dengan menggunakan persamaan diferensial model populasi kontinu pada pertumbuhan penduduk Indonesia dapat diperoleh dengan model populasi eksponensial dan model populasi logistik. Untuk model

populasi eksponensial yang paling baik digunakan adalah model populasi eksponensial III yaitu $P(t) = 147.490.298e^{0,01590000353(t-t_0)}$ dengan laju pertumbuhan relatifnya adalah 1,6% per tahunnya dan model populasi logistik yaitu $P(t) = \frac{267.019.578,1}{[1+(0,8104213072)e^{-0,6028693192t}]}$

2. Model populasi logistik kurang efektif jika digunakan untuk memprediksi jumlah populasi penduduk Indonesia dalam jangka waktu yang panjang, sedangkan model populasi eksponensial dapat menghasilkan nilai yang lebih akurat sehingga lebih efektif digunakan untuk memprediksi jumlah populasi penduduk Indonesia dalam jangka waktu yang panjang.

3. REFERENSI

[1]Giordano, Frank R., William P. Fox and Steven B. Horton. 2014. *A First Course in Mathematical Modeling, Fifth Edition.* USA : Cengage Learning.

[2]Herdiana, H., Sukasno., E. Kusmana. 2002. *Persamaan Differensial.* Bandung : Pustaka Setia.

[3]Jannah, Arina Firdausil. 2008. *Analisis Persamaan Diferensial Model Populasi Kontinu Untuk Spesies Tunggal.* Skripsi S-1 Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

[4]Stewart, James. 2016. *Single Variable Calculus: Early Transcendentals, Eighth Edition.* USA : Cengage Learning.

[5]Sugiyarto, Ph.D. 2015. *Persamaan Diferensial.* Yogyakarta: Binafsi Publisher.

[6]Purcell, Edwin J., Dale Varberg and Steven E. Rigdon. 2004. *Kalkulus Edisi Kedelapan.* Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Ph.D. Bandung : Erlangga.

[7]Badan Pusat Statistik (BPS). 2012.”Penduduk Indonesia menurut Provinsi 1971, 1980, 1990, 1995, 2000, dan 2010”, https://www.bps.go.id/statictable/2009/02/20/1267/penduduk-indonesia-menurut-provinsi-1971-1980-1990-1995-2000-dan-2010.html, diakses pada 20 April 2019 pukul 10.35.