PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB TITIK (a,d) PADA GRAF SIKEL DENGAN TAMBAHAN DUA ANTING $(C_p + 2A_1)$ UNTUK *d* = 3 dan *d* = 4

Dominikus Arif Budi Prasetyo
Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
dominic_abp@usd.ac.id

Abstrak

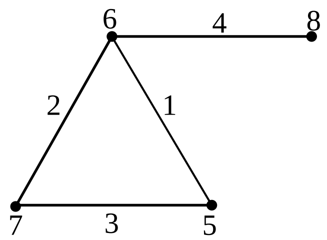
Pelabelan total tak-ajaib titik merupakan suatu pelabelan pada semua sisi dan titik dengan bilangan asli dari 1 sampai dengan banyaknya sisi dan titik. Pada pelabelan ini, bobot semua titiknya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama a dan beda d. Bobot titik adalah jumlahan label titik tersebut dengan label semua sisi yang terhubung dengan titik tersebut. Penelitian bertujuan untuk menentukan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting pada dua titik berbeda dari sikel dilambangkan dengan $(C_p + 2A_1)$. *Penelitian ini menggunakan studi pustaka dan mengkaji beberapa hasil penelitian yang terkait sebelumnya. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada graf sikel dengan tambahan dua anting pada dua titik yang berbeda* $(C_p + 2A_1)$ *dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik (a, d). Pelabelan total tak-ajaib titik* $(p+5,3)$ *dengan label sisinya* $\{1,2,\cdots,p+2\}$ *berlaku untuk* $(C_p + 2A_1)$ *dimana* $p \geq 3$ *dan . Sedangkan pelabelan total tak-ajaib titik* $\left(\frac{p+9}{2},4\right)$ *dengan label sisinya* $\{1,2,\cdots,p+2\}$ *tidak dapat dilakukan pada* $(C_p + 2A_1)$ *dengan* $p \geq 3$ *dan p ganjil karena bobot terkecil yang harus dipenuhi adalah p* + 4.

Kata kunci*: pelabelan total tak-ajaib titik, graf sikel dengan tambahan dua anting.*

1. PENDAHULUAN

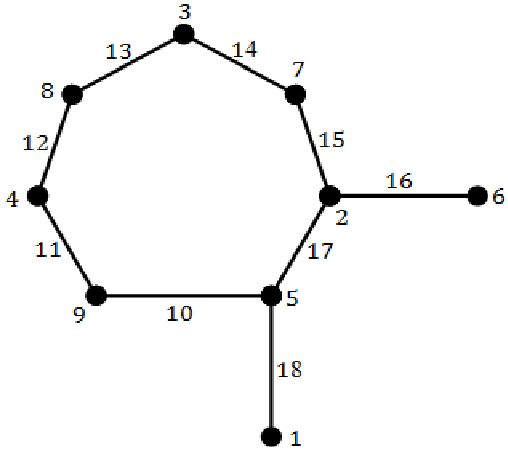
Pelabelan graf dapat diartikan sebagai pemetaan satu-satu dari unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke bilangan bulat positif. Pada pelabelan ini, graf yang dimaksudkan adalah graf sederhana dan tak berarah. Kotzig dan Rosa (1970) memberikan label pada sebuah graf dengan bilangan bulat positif mulai dari 1 sampai dengan sebanyak unsur graf yang akan diberi label sehingga bobot setiap titik atau setiap sisinya sama.

Pelabelan total tak-ajaib titik adalah suatu fungsi bijektif yang memetakan setiap unsur graf ke bilangan bulat positif dengan bobot semua titik atau semua sisinya berbeda. (Baca, dkk., 2003). Septian (2011) telah menunjukkan bahwa pelabelan total tak-ajaib titik (*a*, *d*) dapat dilakukan pada graf sikel dengan tambahan satu anting $(C_p + A_1)$ dimana $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ untuk *d* = 1 dan *d* = 2.

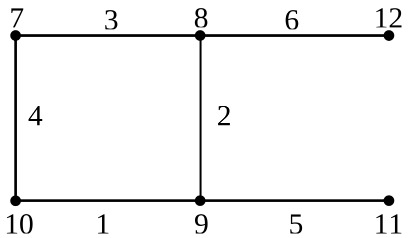


Gambar 1. Pelabelan Total Tak Ajaib Titik (10,1) pada $(C_3 + A_1)$

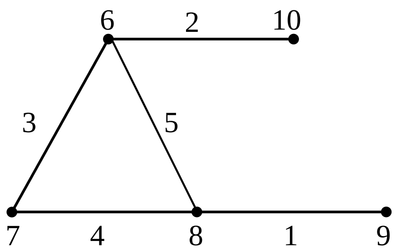
Sedangkan pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_p + 2A_1)$ berlaku pelabelan total ajaib sisi kuat dengan konstanta ajaib pada interval $\frac{5p+9}{2} \leq k \leq \frac{5p+17}{2}$ dimana $p \geq 3$ (Yuliyanto, 2012). Pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_p + 2A_1)$ juga berlaku pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) dimana $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ untuk *d* = 1 dan *d* = 2 (Andriyani, 2014). Perlu diteliti pula bagaimana keberlakukan pelabelan total tak-ajaib titik pada kedua jenis graf tersebut untuk nilai d selain 1 dan 2 agar referensi menjadi lebih lengkap.



Gambar 2. Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada $(C_7 + 2A_1)$ dengan konstanta ajaib 24



Gambar 3. Pelabelan Total Tak-ajaib Titik (14,1) pada $(C_4 + 2A_1)$



Gambar 4. Pelabelan Total Tak-ajaib Titik (10,2) pada $(C_3 + 2A_1)$

Pada artikel ini, penulis akan melanjutkan apa yang telah dilakukan Andriyani (2014), yakni membuktikan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik pada graf sikel dengan tambahan dua anting untuk d = 3 dan d = 4.

2. KAJIAN LITERATUR

Berikut ini beberapa definisi mengenai pelabelan total tak-ajaib titik (a, d). (Baca, dkk., 2003)

Definisi 1

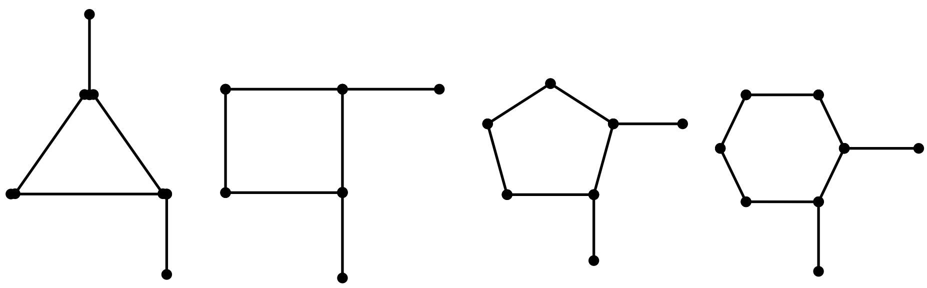
Suatu pemetaan bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib titik dari graf G (p, q) jika bobot dari titik $w_f(u) = f(u) + \sum f(uv)$, untuk setiap $u \in V(G)$ dan semua $v \in V(G)$ yang terhubung dengan u.

Definisi 2

Suatu pemetaan bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) dari graf G(p, q) jika bobot dari titik-titiknya membentuk barisan aritmetika naik dengan suku pertama a dan beda d.

$$W = \{w_f(u) \mid u \in V\}$$
$$= \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(p-1)d\}.$$

Selanjutnya agar pembaca mempunyai gambaran mengenai bentuk dari graf sikel dengan tambahan dua anting, berikut diberikan ilustrasi pada Gambar 5. (Yuliyanto, 2012).



Gambar 5. Graf sikel dengan tambahan dua anting untuk p = 3, 4, 5, dan 6.

Berikut ini beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai pelabelan total tak-ajaib titik (a, d) pada sikel dengan tambahan dua anting. (Andriyani, 2014).

Teorema 3.
Pada graf $(C_p + 2A_1)$ untuk $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik (*a*, *d*) dengan $a = \frac{5p+13-(p+1)d}{2}$ dan $d \leq 5$.

Teorema 4
Pada graf $(C_p + 2A_1)$ untuk $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik $(2p+6,1)$.

Teorema 5
Pada graf $(C_p + 2A_1)$ untuk $p \geq 3$, p ganjil dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik $\left(\frac{3p+11}{2},2\right)$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi pustaka dan mengkaji beberapa hasil penelitian yang terkait sebelumnya. Kajian ini melanjutkan kajian yang telah dilakukan Andriyani (2014) yang telah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik (*a*, *d*) pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_p + 2A_1)$ dimana $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ dengan hasil pada Teorema 3, Teorema 4 dan Teorema 5.

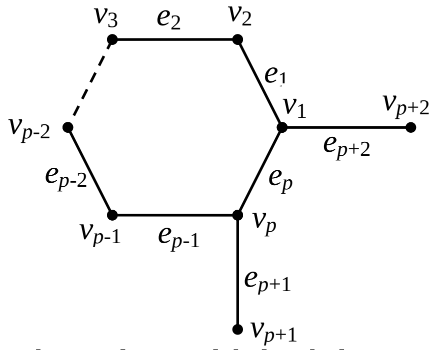
4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pelabelan total tak-ajaib titik, jumlahan bobot semua titik adalah $S_v + 2S_e$ karena label setiap sisi terhitung sebanyak dua kali, dimana S_v adalah jumlahan label semua titik dan S_e adalah jumlahan label semua sisi. Pada graf $(C_p + 2A_1)$, banyaknya titik dan sisi masing-masing sebanyak *p* + 2. Sehingga diperoleh bahwa:

$$a + (a+d) + \cdots + (a + (p+1)d) = S_v + 2S_e$$

$$(p+2)a + \frac{(p+1)(p+2)d}{2} = S_v + 2S_e$$

Dari Teorema 3, karena label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$, maka label titiknya adalah $\{p+3, p+4,\cdots,2p+4\}$. Sehingga diperoleh $S_e = \frac{(p+2)(p+3)}{2}$ dan $S_v = \frac{(p+2)(8p+7)}{2}$.



Gambar 6. Ilustrasi label titik dan sisi pada graf $(C_p + 2A_1)$

Berdasarkan Teorema 3, nilai *d* yang memungkinkan adalah 1, 2, 3, 4, dan 5. (Andriyani, 2014). Untuk nilai *d* = 1 dan 2 sudah ditunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik pada $(C_p + 2A_1)$ dimana $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ di Teorema 4 dan Teorema 5.

Sekarang akan ditunjukkan keberlakuan pelabelan tersebut pada $(C_p + 2A_1)$ dimana $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ untuk nilai *d* = 3, *d* = 4 dan *d* = 5.

a. Pelabelan total tak-ajaib titik dengan nilai *d* = 3.

Berdasarkan Teorema 3 dan *d* = 3 diperoleh bahwa bobot terkecil *a*

$$a = \frac{5p+13-(p+1)d}{2}$$
$$= \frac{5p+13-(p+1)3}{2}$$
$$= p+5 \qquad \ldots(\text{i})$$

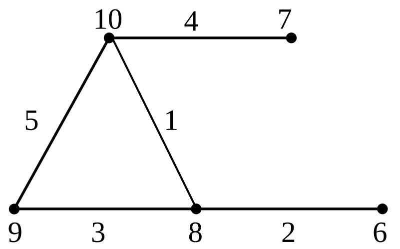
Sedangkan untuk pelabelan total tak-ajaib titik dengan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$, diperoleh bobot minimal *a* adalah:

$$a \geq 1 + (p+3)$$
$$= p+4 \qquad \ldots(\text{ii})$$

Hasil pada persamaan (i) dan (ii) tidak terjadi kontradiksi, maka graf $(C_p + 2A_1)$

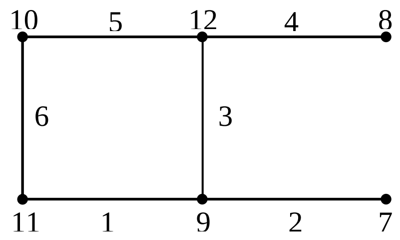
untuk $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1,2,\cdots,p+2\}$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik $(p+5,3)$.

Berikut ini pelabelan total tak-ajaib titik pada beberapa graf $(C_p + 2A_1)$.



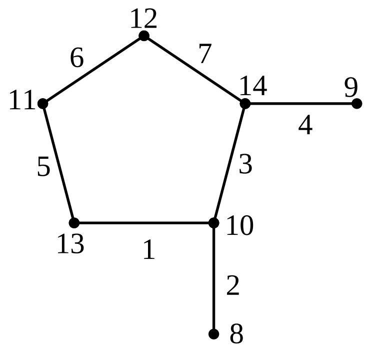
Gambar 7. Pelabelan total tak-ajaib titik (8, 3) pada $(C_3 + 2A_1)$

Dari pelabelan pada Gambar 7 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5\}$ dan label titiknya $\{6,7,8,9,10\}$. Bobot masing-masing titiknya adalah $\{8,11,14,17,20\}$, yakni bobot titik dengan label 6 adalah $2+6=8$, bobot titik dengan label 7 adalah $4+7=11$, bobot titik dengan label 8 adalah $1+2+3+8=14$, bobot titik dengan label 9 adalah $3+5+9=17$, dan bobot titik dengan label 10 adalah $1+4+5+10=20$.



Gambar 8. Pelabelan total tak-ajaib titik (9, 3) pada $(C_4 + 2A_1)$

Dari pelabelan pada Gambar 8 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5,6\}$ dan label titiknya $\{7,8,9,10,11,12\}$. Bobot masing-masing titiknya adalah $\{9,12,15,18,21,24\}$, yakni bobot titik dengan label 7 adalah $2+7=9$, bobot titik dengan label 8 adalah $4+8=12$, bobot titik dengan label 9 adalah $1+2+3+9=15$, bobot titik dengan label 10 adalah $5+6+10=21$, bobot titik dengan label 11 adalah $3+4+6+11=24$, dan bobot titik dengan label 12 adalah $1+5+12=18$.



Gambar 9. Pelabelan total tak-ajaib titik (10,3) pada $(C_5 + 2A_1)$

Dari pelabelan pada Gambar 9 diperoleh bahwa label sisinya $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dan label titiknya $\{8,9,10,11,12,13,14\}$. Bobot masing-masing titiknya adalah $\{10,13,16,19,22,25,28\}$, yakni bobot titik dengan label 8 adalah $2+8=10$, bobot titik dengan label 9 adalah $4+9=13$, bobot titik dengan label 10 adalah $1+2+3+10=16$, bobot titik dengan label 11 adalah $5+6+11=22$, bobot titik dengan label 12 adalah $6+7+12=25$, bobot titik dengan label 13 adalah $1+5+13=19$ dan bobot titik dengan label 14 adalah $3+4+7+14=28$.

Berdasarkan pada pelabelan tersebut, dapat diperoleh bahwa untuk semua graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_p + 2A_1)$ kita dapat melakukan pelabelan total tak-ajaib titik $(p+5,3)$. Misalkan fungsi pelabelan tersebut adalah *f*, maka diperoleh konsistensi rumus *f* untuk label sisi anting adalah $f(e_{p+i}) = 2i$ dengan $i = 1,2$ dan label untuk titik antingnya adalah $f(v_{p+i}) = p+2+i$ dengan $i = 1,2$, $f(v_1) = 2p+4$ dan $f(v_p) = p+5$.

b. Pelabelan total tak-ajaib titik dengan nilai d = 4.

Berdasarkan Teorema 3 dan d = 4 diperoleh bahwa

$$a = \frac{5p + 13 - (p+1)d}{2}$$
$$= \frac{5p + 13 - (p+1)4}{2}$$
$$= \frac{p+9}{2} \qquad \ldots (iii)$$

Hasil pada persamaan (ii) dan (iii) terjadi kontradiksi dimana untuk *d* = 4 nilai $a = \frac{p+9}{2}$ sedangkan nilai *a* terkecil adalah $p + 4$. Jadi pada graf $(C_p + 2A_1)$ untuk $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1, 2, \cdots, p+2\}$ tidak dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik untuk *d* = 4.

c. Pelabelan total tak-ajaib titik dengan nilai *d* = 5.

Berdasarkan Teorema 3 dan *d* = 5 diperoleh bahwa

$$a = \frac{5p + 13 - (p+1)d}{2}$$
$$= \frac{5p + 13 - (p+1)5}{2}$$
$$= 4 \qquad (iv)$$

Hasil pada persamaan (ii) dan (iv) terjadi kontradiksi dimana untuk *d* = 5 nilai $a = 4$ sedangkan nilai *a* terkecil adalah *p* + 4. Jadi pada graf $(C_p + 2A_1)$ untuk $p \geq 3$ dan label sisinya $\{1, 2, \cdots, p+2\}$ tidak dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik untuk *d* = 5.

5. KESIMPULAN

Pada graf sikel dengan tambahan dua anting pada dua titik yang berbeda $(C_p + 2A_1)$ dapat dilakukan pelabelan total tak-ajaib titik (*a*, *d*). Pelabelan total tak-ajaib titik $(p+5, 3)$ dengan label sisinya $\{1, 2, \cdots, p+2\}$ berlaku untuk $(C_p + 2A_1)$ dimana $p \geq 3$. Sedangkan pelabelan total tak-ajaib titik $\left(\frac{p+9}{2}, 4\right)$ dengan label sisinya $\{1, 2, \cdots, p+2\}$ tidak dapat dilakukan pada $(C_p + 2A_1)$ dengan $p \geq 3$ dan *p* ganjil.

Pembaca yang tertarik dengan pelabelan ini dapat melanjutkan dengan mencari rumus umum pelabelannya, mencari keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik kuat atau mencari keberlakuan pelabelan total tak-ajaib titik untuk label sisi bukan $\{1, 2, \cdots, p+2\}$ pada graf sikel dengan tambahan dua anting $(C_p + 2A_1)$.

6. REFERENSI

Andriyani, R. (2014). *Pelabelan Total Tak-ajaib Titik Pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Baca, M., dkk. (2003) *Vertex Antimagic Total Labeling of Graph*. Discuss Math. Graph Theory.

Kotzig, A. dan Rosa, A. (1970). *Magic Valuations of Finite Graphs*. Canad. Math. Bull.

Septian, C. W. (2011). *Vertex Antimagic Total Labeling on Cycle Graph with One Extra Arm.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Wallis, W. (2001). *Magic Graph.* Birkhauser.

Yuliyanto, B. D. (2012). *Pelabelan Total Ajaib Sisi Kuat pada Graf Sikel dengan Tambahan Dua Anting.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.