PENDUGA RASIO UNTUK VARIANSI POPULASI MENGGUNAKAN VARIABEL BANTU DAN KOEFISIEN KURTOSIS PADA PENGAMBILAN SAMPEL ACAK STRATIFIKASI

Hunaifah[1], Etik Zukhronah[2], Sugiyanto[3]
[1]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret
email: naifahelzavira98@gmail.com
[2]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret
email: etikzukhronah@staff.uns.ac.id
[3]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret
email: sugiyanto61@staff.uns.ac.id

ABSTRAK

Total populasi dapat diduga dengan menggunakan penduga rasio. Penduga rasio merupakan penduga dengan memanfaatkan hubungan antara variabel bantu dan variabel penelitian. Informasi yang diberikan oleh variabel bantu yang berkorelasi positif dengan variabel penelitiaan dapat meningkatkan ketelitian. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan penduga klasik dengan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis untuk variansi populasi pada pengambilan sampel acak stratifikasi. Penururan ulang rata-rata kuadrat sesatan dilakukan dengan menggunakan metode derat taylor. Penduga yang efisien adalah penduga yang memiliki nilai rata-rata kuadrat sesatan yang terkecil. Selanjutnya penduga rasio diterapkan pada data produksi padi di Pulau Jawa tahun 2015 sebagai variabel penelitian dan luas lahan panen sebagai variabel bantu. Berdasarkan penerapan tersebut diperoleh nilai dari rata-rata kuadrat sesatan penduga klasik dan rata-rata kuadrat sesatan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis. Nilai rata-rata kuadrat sesatan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis lebih kecil dibandingkan penduga klasik maka dapat disimpulkan bahwa penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis merupakan penduga yang lebih efisien dibandingkan penduga klasik.

Kata Kunci: *penduga rasio, variansi populasi, koefisien kurtosis, sampel acak stratifikasi, rata-rata kuadrat sesatan.*

1. PENDAHULUAN

Statistika dapat diartikan sebagai ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang cara mengumpulkan, mengolah, menganalisis, dan menginterpretasikan data sehingga dapat disajikan lebih baik. Terdapat beberapa pengambilan sampel salah satunya adalah pengambilan sampel acak stratifikasi. Pengambilan sampel acak stratifikasi adalah modifikasi dari pengambilan sampel acak sederhana yang digunakan untuk menghasilkan sampel yang representatif dan akurat. Dalam pengambilan sampel acak stratifikasi, populasi dibagi menjadi beberapa strata, selanjutnya dari masing-masing strata diambil sampel secara acak.

Total populasi dapat diduga menggunakan penduga rasio. Penduga rasio memanfaatkan hubungan antara variabel bantu (X) dan variabel penelitian (Y). Apabila terdapat korelasi positif antara variabel bantu dan variabel penelitian maka penduga rasio dapat meningkatkan ketepatan dugaan.

Pada tahun 1977, Cochran mengemukakan metode penduga rasio menggunakan variabel bantu untuk menduga rata-rata populasi pada pengambilan sampel acak sederhana. Selanjutnya di tahun 1990, Prasad dan Singh melakukan perbandingan antara penduga klasik dan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu untuk variansi populasi pada sampel acak sederhana dengan melihat nilai dari rata-rata kuadrat sesatan (RKS). Pada penelitian tersebut disimpulkan bahwa penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu lebih efektif daripada penduga klasik karena memiliki nilai RKS yang lebih kecil.

Pada tahun 1993, Singh dan Kakran dalam Upadhyaya dan Singh (1999) memodifikasi penduga rasio untuk menduga rata-rata populasi pada pengambilan sampel acak sederhana dengan menambahkan koefisien kurtosis. Isaki (1983) mengembangkan penduga rasio untuk variansi populasi menggunakan variabel bantu pada pengambilan sampel acak sederhana. Pada tahun 2003, Kadilar dan Cingi memodifikasi penduga rasio untuk menduga rata-rata populasi pada pengambilan sampel acak stratifikasi menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis. Selanjutnya Kadilar dan Cingi (2006) memodifikasi penduga klasik untuk variansi populasi pada sampel acak stratifikasi dengan menggunakan koefisien kurtosis. Pada penelitian tersebut disimpulkan bahwa penduga rasio dengan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis pada pengambilan sampel acak stratifikasi lebih baik daripada penduga klasik dan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu.

Pada tahun 2015, Sari melakukan penelitian penduga rasio untuk variansi populasi menggunakan koefisien variasi dan koefisien kurtosis pada pengambilan sampel acak sederhana. Penelitian ini diterapkan pada data produksi coklat di Pulau Jawa tahun 2013, dapat disimpulkan bahwa RKS pada penduga rasio untuk variansi populasi menggunakan koefisien kurtosis merupakan penduga rasio yang efektif.

Pada penelitian ini dikaji ulang RKS penduga klasik dan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis untuk variansi populasi pada pengambilan sampel acak stratifikasi dan melakukan perbandingan RKS dari dua penduga tersebut. Perbandingan RKS akan diterapkan pada data produksi padi di Pulau Jawa tahun 2015.

2. KAJIAN LITERATUR

A. Pengambilan Sampel Acak Stratifikasi

Menurut Cochran (1977) pada pengambilan sampel acak stratifikasi, populasi distratifikasi menjadi L strata, masing-masing berisi $N_1, N_2, ..., N_l$, dengan

$$N = \sum_{h=1}^{L} N_h$$

N adalah jumlah unit populasi dan N_h adalah jumlah unit tiap stratum.

Selanjutnya setiap strata diambil sampel secara acak berukuran $n_1, n_2, ..., n_l$ sehingga dapat ditulis

$$n = \sum_{h=1}^{L} n_h$$

dengan n adalah jumlah unit sampel dan n_h adalah jumlah unit sampel pada strata ke-h.

B. Koefisien Korelasi

Ahlgren, dkk (2003) menyatakan bahwa korelasi merupakan angka yang menunjukkan arah dan kuatnya hubungan antara dua variabel. Koefisien korelasi berada pada interval $-1 \le \rho \le 1$ dan dirumuskan dengan

$$\rho = \frac{N\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \sum_{I=1}^{N} X_i \sum_{i=1}^{N} Y_i}{\sqrt{N\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} X_I)^2}\sqrt{N\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} Y_i)^2}}$$

C. Koefisien Kurtosis

Kurtosis adalah ukuran keruncingan suatu distribusi. Kurtosis terbagi menjadi tiga kelompok yaitu leptokurtik, mesokurtik, dan platikurtik, jenis pengelompokan pada kurva kurtosis dibandingkan dengan distribusi normal. Koefisien kurtosis untuk variansi populasi dirumuskan dengan

$$\beta_2(x)=\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^4}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2\right)^2}$$

dengan $\beta_2(x)$ adalah koefisien kurtosis, N adalah banyaknya unit populasi, X_i adalah data ke-i dari variabel X, dan $\bar{X}$ adalah rata-rata populasi pada variabel X.

D. Rata-rata Kuadrat Sesatan

Suatu penduga dikatakan lebih baik daripada penduga yang lain jika memiliki rata-rata kuadrat sesatan (RKS) yang lebih kecil. RKS dapat digunakan untuk membandingkan dua penduga yang mempunyai nilai bias berbeda, atau penduga bias dan penduga tak bias (Bain dan Engelhardlt, 1988). Secara umum dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned} RKS &= E(\hat{\theta}-\theta)^2 \\ &= (\text{var}iansi\,\hat{\theta})-(bias)^2 \end{aligned}$$

E. Deret Taylor

Menurut Mendoza (1982) dimisalkan $\tilde{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,...,x_t)$ merupakan vektor statistik dan $\tilde{\mathbf{X}}=(X_1,X_2,...,X_t)$ merupakan vektor parameter sedemikian sehingga $E(\tilde{\mathbf{x}})=\tilde{\mathbf{X}}$. Misalkan parameter populasi adalah fungsi $f(\tilde{\mathbf{X}})$ dan diduga dengan $f(\tilde{\mathbf{x}})$. Oleh karena itu, ekspansi deret Taylor $f(\tilde{\mathbf{x}})$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(\tilde{\mathbf{x}})\cong f(\tilde{\mathbf{X}})+\sum_{j=1}^{t}(x_j-X_j)\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_j}+\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t}(x_j-X_j)(x_k-X_k)\frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_j\partial X_k}+\ldots$$

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde pertama, pendekatan linier untuk $f(\tilde{\mathbf{x}})$ adalah

$$f(\tilde{\mathbf{x}})\cong f(\tilde{\mathbf{X}})+\sum_{j=1}^{t}(x_j-X_j)\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_j}$$

$$f(\tilde{\mathbf{x}})-f(\tilde{\mathbf{X}})\cong\sum_{j=1}^{t}(x_j-X_j)\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_j}$$

dengan **d** merupakan vektor turunan parsial dan Σ merupakan matriks variansi kovariansi

$$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_1}\\ \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial X_t}\end{bmatrix}\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1t}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2t}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \sigma_{t1} & \cdots & \cdots & \sigma_{tt}\end{bmatrix}$$

Sehingga RKS dapat ditulis dengan

$$RKS[f(\tilde{\mathbf{x}})]=\mathbf{d}\Sigma\mathbf{d}'$$

F. Penduga Rasio

Penduga rasio memanfaatkan korelasi positif yang terbentuk antara variabel bantu dan variabel penelitian. Pada pengambilan sampel acak stratifikasi, penduga dari variansi populasi dapat ditulis dengan

$$s_{st,y}^2=\sum_{h=1}^{l}\hat{\omega}_h s_{yh}^2+\sum_{h=1}^{l}\hat{\omega}_h(\bar{y}_h-\bar{y}_{st})^2$$

dengan $\hat{\omega}_h=\frac{n_h}{n}$, s_{yh}^2 adalah variansi sampel, dan $\bar{y}_h$ adalah rata-rata sampel pada strata ke-h. $\bar{y}_{st}=\sum_{h=1}^{l}\omega_h\bar{y}_h$ adalah penduga dari rata-rata populasi Y dari sampel acak stratifikasi.

Kadilar dan Cingi (2006) juga mengembangkan penduga rasio untuk populasi dengan koefisien kurtosis (S_{pr2}^2) sehingga diperoleh modifikasi penduga rasio yang baru

$$S_{rcpr2}^2=\frac{s_{st,y}^2}{s_{st,x}^2+\beta_2(x)}\left[S_x^2+\beta_2(x)\right]$$

dengan $\beta_2(x)$ adalah koefisien kurtosis dari variabel bantu.

3. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini dilakukan kajian ulang penurunan RKS pada penduga klasik dan penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data produksi padi di Pulau Jawa tahun 2015 yang diambil dari Badan Pusat Statistik (2016). Populasi dari penelitian ini adalah Kabupaten di Pulau Jawa dengan jumlah 108 kabupaten. Pengambilan sampel dilakukan menggunakan pengambilan sampel acak stratifikasi.

Adapun tahapan yang dilakukan dalam penurunan RKS adalah menentukan turunan parsial dari penduga rasio klasik terhadap parameter, menentukan matrix **d,** Σ**,** dan **d'** , dan menghitung rumus RKS.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penerapan adalah

1. Mengelompokkan populasi ke dalam beberapa strata.
2. Menentukan nilai karakteristik dari populasi.
3. Menghitung nilai RKS dari masing-masing penduga rasio.
4. Membandingkan RKS.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Penurunan ulang RKS rasio klasik

RKS untuk penduga klasik dapat diturunkan menggunakan pendekatan deret taylo. Ekspetasi deret taylor orde pertama menghasilkan matriks **d** dan matriks Σ yang berisi variansi dan kovariansi. Maka elemen dari matriks **d** dan matriks Σ adalah

$$\mathbf{d}_h = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial s^2_{st,y}}{\partial s^2_{yh}}\right|_{s^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y}} & \left.\dfrac{\partial s^2_{st,y}}{\partial \bar{y}_h}\right|_{s^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y}} & \left.\dfrac{\partial s^2_{st,y}}{\partial \bar{y}_{st}}\right|_{s^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_h & 2\omega_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) & -2\omega_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} V\left(s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, \bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, \bar{y}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, s^2_{yh}\right) & V\left(\bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{y}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{y}_h\right) & V\left(\bar{y}_{st}\right) \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat rumus RKS penduga klasik adalah

$$\begin{aligned} RKS(s^2_{st,y}) &\cong \sum_{h=1}^{l} \mathbf{d}_h \Sigma_h \mathbf{d}'_h \\ &\cong \sum_{h=1}^{l} \omega_h^2 V(s^2_{yh}) \\ &\quad + 4\sum_{h=1}^{l} \omega_h^2 (\bar{Y}_h - \bar{Y}_h)\left[\mathrm{cov}(\bar{y}_h, s^2_{yh}) - \mathrm{cov}(\bar{y}_{st}, s^2_{yh})\right] \\ &\quad + 4\sum_{h=1}^{l} \omega_h^2 (\bar{Y}_h - \bar{Y}_h)^2\left[V(\bar{y}_{st}) - \mathrm{cov}(\bar{y}_h, \bar{y}_{st}) - \mathrm{cov}(\bar{y}_h, \bar{y}_{st})\right] \\ &\cong \sum \omega_h^2 \lambda_h S^4_{yh}\left[\beta_2\left(y_h\right)\right] \\ &\quad + 4\sum \omega_h^2\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)\left(\lambda_h \mu_{30h} - \sum \omega_h \lambda_h \mu_{30h}\right) \\ &\quad + 4\sum \omega_h^2\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)^2\left(\lambda_h S^2_{yh} - 2\sum \omega_h \lambda_h S^2_{yh} + \omega_h^2 \lambda_h S^2_{yh}\right) \end{aligned}$$

B. Penurunan ulang RKS penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis

RKS untuk penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis dapat diturunkan menggunakan pendekatan deret taylor. Ekspetasi deret taylor orde pertama menghasilkan matriks **d** dan matriks Σ yang berisi variansi dan kovariansi. Maka elemen dari matriks **d** dan matriks Σ adalah

$$\mathbf{d}'_h = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial s^2_{rcpr2}}{\partial s^2_{yh}}\right|_{S^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y},S^2_{xh},\bar{X}_h,\bar{X}} \\ \left.\dfrac{\partial s^2_{rcpr2}}{\partial \bar{y}_h}\right|_{S^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y},S^2_{xh},\bar{X}_h,\bar{X}} \\ \left.\dfrac{\partial s^2_{rcpr2}}{\partial \bar{y}_h}\right|_{S^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y},S^2_{xh},\bar{X}_h,\bar{X}} \\ \left.\dfrac{\partial s^2_{rcpr2}}{\partial s^2_{yh}}\right|_{S^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y},S^2_{xh},\bar{X}_h,\bar{X}} \\ \left.\dfrac{\partial s^2_{rcpr2}}{\partial \bar{y}_h}\right|_{S^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y},S^2_{xh},\bar{X}_h,\bar{X}} \\ \left.\dfrac{\partial s^2_{rcpr2}}{\partial \bar{x}_{st}}\right|_{S^2_{yh},\bar{Y}_h,\bar{Y},S^2_{xh},\bar{X}_h,\bar{X}} \end{bmatrix} = \frac{S_x^2 + \beta_2\left(x\right)}{\delta + \beta_2\left(x\right)} \begin{bmatrix} \omega_h \\ 2\omega_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \\ -2\omega_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \\ \dfrac{-\omega_h \nu}{\delta + \beta_2\left(x\right)} \\ \dfrac{-2\omega_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)\nu}{\delta + \beta_2\left(x\right)} \\ \dfrac{2\omega_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)\nu}{\delta + \beta_2\left(x\right)} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} V\left(s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, \bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, \bar{y}_{st}\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, s^2_{xh}\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, \bar{x}_h\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{yh}, \bar{x}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, s^2_{yh}\right) & V\left(\bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{y}_{st}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, s^2_{xh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{x}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{x}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{y}_h\right) & V\left(\bar{y}_{st}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, s^2_{xh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{x}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(s^2_{xh}, s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{xh}, \bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{xh}, \bar{y}_{st}\right) & V\left(s^2_{xh}\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{xh}, \bar{x}_h\right) & \mathrm{cov}\left(s^2_{xh}, \bar{x}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, \bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, \bar{y}_{st}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, s^2_{xh}\right) & V\left(\bar{x}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, \bar{x}_{st}\right) \\ \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, s^2_{yh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, \bar{y}_h\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, s^2_{xh}\right) & \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, \bar{x}_h\right) & V\left(\bar{x}_{st}\right) \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat rumus RKS penduga rasio gabungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis adalah

$$
\begin{aligned}
RKS(s^2_{rcpr2}) &\cong \sum_{h=1}^{l} \mathbf{d}_h \Sigma_h \mathbf{d}'_h \\
&\cong \frac{S_x^4+\beta_2(x)}{\delta^2+\beta_2(x)}\{\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2 V\left(s_{yh}^2\right) \\
&+4\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right)\left(\operatorname{cov}\left(\bar{y}_h, s_{yh}^2\right)-\operatorname{cov}\left(\bar{y}_{st}, s_{yh}^2\right)\right)+ \\
&+4\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right)^2\left(V\left(\bar{y}_h\right)-2\operatorname{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{y}_h\right)+V\left(\bar{y}_{st}\right)\right) \\
&-2\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2 \operatorname{cov}\left(s_{yh}^2, s_{xh}^2\right) \\
&-4\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{X}_h-\bar{X}\right)\left(\operatorname{cov}\left(\bar{x}_h, s_{yh}^2\right)-\operatorname{cov}\left(\bar{x}_{st}, s_{yh}^2\right)\right) \\
&-\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\operatorname{cov}\left(\bar{x}_h, s_{xh}^2\right)+\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\operatorname{cov}\left(\bar{x}_{st}, s_{xh}^2\right)) \\
&-4\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right)\left(\operatorname{cov}\left(\bar{y}_h, s_{xh}^2\right)-\operatorname{cov}\left(\bar{y}_{st}, s_{xh}^2\right)\right) \\
&+\frac{v^2}{\left(\delta+\beta_2(x)\right)^2}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2 V\left(s_{xh}^2\right) \\
&-8\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{X}_h-\bar{X}\right)\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right) \\
&\mathrm{x}\left(\operatorname{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{x}_h\right)-2\operatorname{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{x}_h\right)+\operatorname{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}\right)\right) \\
&+4\frac{v^2}{\left(\delta+\beta_2(x)\right)^2}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{X}_h-\bar{X}\right)^2 \\
&\mathrm{x}\left(V\left(\bar{x}_h\right)-2\operatorname{cov}\left(\bar{x}_{st}, \bar{x}_h\right)+V\left(\bar{x}_{st}\right)\right)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
RKS(s^2_{rcpr2}) &\cong \frac{S_x^4+\beta_2(x)}{\delta^2+\beta_2(x)}\{\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\lambda_h S_{yh}^4\left[\beta_2\left(y_h-1\right)\right] \\
&+4\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right)\left(\lambda_h\mu_{30h}-\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h\mu_{30h}\right)+ \\
&+4\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right)\left(\lambda_h S_{yh}^2-2\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h S_{yh}^2+\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\lambda_h S_{yh}^2\right) \\
&-2\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\lambda_h S_{yh}^2 S_{xh}^2\left(\theta_h-1\right) \\
&-4\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{X}_h-\bar{X}\right)(\lambda_h\mu_{21h}-\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h\mu_{21h} \\
&-\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\lambda_h\mu_{03h}+\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h\mu_{03h}) \\
&-4\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right)\left(\lambda_h\mu_{12h}-\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h\mu_{12h}\right) \\
&+\frac{v^2}{\left(\delta+\beta_2(x)\right)^2}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\lambda_h S_{xh}^4\left[\beta_2\left(x_h\right)-1\right] \\
&-8\frac{v}{\delta+\beta_2(x)}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{X}_h-\bar{X}\right)\left(\bar{Y}_h-\bar{Y}\right) \\
&\mathrm{x}\left(\lambda_h S_{yxh}-2\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h S_{yxh}+\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\lambda_h S_{yxh}\right) \\
&+4\frac{v^2}{\left(\delta+\beta_2(x)\right)^2}\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\left(\bar{X}_h-\bar{X}\right)^2 \\
&\mathrm{x}\left(\lambda_h S_{xh}^2-2\sum_{h=1}^{L}\omega_h\lambda_h S_{xh}^2+\sum_{h=1}^{L}\omega_h^2\lambda_h S_{xh}^2\right)\}
\end{aligned}
$$

C. Penerapan

Penduga rasio gabungan mengunakan variabel bantu dan koefiien kurtosis pada pengambilan sampel acak stratifikasi diterapkan pada data produksi padi di Pulau Jawa tahun 2015. Luas lahan panen sebagai variabel bantu (X) dan produksi padi sebagai variabel penelitian (Y).

Data dibagi menjadi tiga strata berdasarkan produktivitas dari litbang pertanian. Strata pertama dengan produktivitas tinggi yaitu lebih besar dari 5,808 terdiri dari 78 Kabupaten/Kota. Strata kedua dengan produktivitas sedang yaitu antara 5,727 dan 5,808 terdiri dari 10 Kabupaten/Kota. Strata ketiga dengan produktivitas rendah yaitu lebih kecil dari 5,727 terdiri dari 20 Kabupaten/Kota. Tabel 1 merupakan karakteristik populasi.

Tabel 1. Karakteristik Populasi

$N = 108$	$N_1 = 78$	$N_2 = 10$	$N_3 = 20$
$\overline{X} = 55036$	$\overline{X}_1 = 58141{,}97$	$\overline{X}_2 = 66768{,}6$	$\overline{X}_3 = 37056{,}4$
$\overline{Y} = 338477$	$\overline{Y}_1 = 368951{,}8$	$\overline{Y}_2 = 385360{,}681$	$\overline{Y}_3 = 196183{,}3$
$\beta_2(x) = 2{,}937606$	$\beta_2(x_1) = 2{,}854511$	$\beta_2(x_2) = 1{,}661824$	$\beta_2(x_3) = 1{,}78521$
$\beta_2(y) = 3{,}253868$	$\beta_2(y_1) = 2{,}989035$	$\beta_2(y_2) = 1{,}657389$	$\beta_2(y_3) = 1{,}76294422$
$S_x^2 = 2104850248$	$S_{x1}^2 = 2298292438$	$S_{x2}^2 = 2626073881$	$S_{x3}^2 = 843234872$
$S_x = 45878{,}65$	$S_{x1} = 47940{,}51$	$S_{x2} = 51245{,}23$	$S_{x3} = 29038{,}51$
$C_x = 0{,}8336116$	$C_{x1} = 0{,}8245422$	$C_{x2} = 0{,}767505$	$C_{x3} = 0{,}78363$
$S_y^2 = 83897665909$	$S_{y1}^2 = 94035205262$	$S_{y2}^2 = 87169371125$	$S_{y3}^2 = 2381288317$
$S_y = 289650{,}9$	$S_{y1} = 306651{,}6$	$S_{y2} = 295244{,}59$	$S_{y3} = 154314{,}2$
$C_y = 0{,}8557479$	$C_{y1} = 0{,}8311427$	$C_{y2} = 0{,}7661513$	$C_{y3} = 0{,}7865819$
$\rho = 0{,}9944495$	$\rho_1 = 0{,}9974537$	$\rho_2 = 0{,}99999026$	$\rho_3 = 0{,}994743$
	$\omega_1 = 0{,}7222222$	$\omega_2 = 0{,}0925926$	$\omega_3 = 0{,}1851852$
	$\lambda_1 = 0{,}019226579$	$\lambda_2 = 0{,}1557614243$	$\lambda_3 = 0{,}149006629$
	$\theta_1 = 2{,}905055$	$\theta_2 = 1{,}659562$	$\theta_3 = 1{,}762692$
	$S_{xy1} = 354665856$	$S_{xy2} = 35342075735$	$S_{xy3} = 10929247$

Tabel 1 menunjukkan bahwa nilai korelasi dari variabel penelitian dan variabel bantu adalah 0,9944495, artinya kedua variabel mempunyai korelasi yang positif sehingga penduga rasio dapat digunakan untuk menduga variansi populasi produksi padi di Pulau Jawa pada tahun 2015.

Menggunakan rumus dari $RKS(s_{st,y}^2)$ dan $RKS(s_{rcpr2}^2)$ yang telah dibuktikan di atas maka didapat nilai RKS seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai RKS

$RKS(s_{st,y}^2)$	1,870707e+20
$RKS(s_{rcpr2}^2)$	2,306392e+19

Tabel 2 menunjukkan bahwa nilai RKS pada penduga rasio menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis merupakan penduga yang lebih efisien daripada penduga klasik karena memiliki nilai RKS yang lebih kecil.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa rumus dari RKS untuk penduga klasik dan penduga rasio gebungan menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosi pada pengambilan sampel acak stratifikasi terbukti.

Perbandingan RKS untuk penduga rasio klasik dan penduga rasio menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis menunjukkan bahwa penduga rasio menggunakan variabel bantu dan koefisien kurtosis untuk variansi populasi pada pengambilan sampel acak stratifikasi lebih efisien karena memiliki RKS yang lebih kecil

6. REFERENSI

Badan Pusat Statistik. *2016. Provinsi Dalam Angka 2016.*

Cochran, W. G. 1997. *Sampling Techniques.* John Willey and Sounds, New York.

Bain, L. J. and Engelhardlt. 1991. *Introduction to probability and Mathematical Statistics*. Duxbury Press, Belmont California.

Isaki, C. T. 1983. Variance Estimatos using Auxiliary Information. *Journal of the American Statistical Association* **78** . 117-123.

Ahlgren, P., Jarneving, B., and Rousseau, R. 2003. Requirements for a cocitation similarity measure, with special reference to Pearson's correlation coefficient. *Journal of the American Society for Information Science and Technology, **54(6)**, 550–560.*

Kadilar, C. and Cingi, H., 2003. Ratio Estimators in Stratified Random Sampling. *Biometrical Journal*. 218-225.

Kadilar, C. and Cingi, H., 2006. Ratio Estimators for Population Variance in Simple and Stratified Random Sampling. *Applied Mathematics and Computation **173***. 1047-1059.

Prasad, B. and Singh, H. P. 1990. Some Improved Ratio-Type Estimators of Finite Population Variance in Sample Survey. *Communication in Statistics: Theory and Methods **19*** 1127-1139.

Sari, F. M. 2015. *Penduga Rasio untuk Variansi Populasi Menggunakan Koefisien Variasi dan Koefisien Kurtosis pada Pengambilan Sampel Acak Sederhana.* Skripsi. Universitas Sebelas Maret. Surakarta.

Subramani, J. and Kumarapandiyan, G. 2013. Estimation of Variance Using Known Coefficiend of Varition and Median of an Auxiliary Variable. *Journal of Modern Applied Statistical Menthod **12***. 58-64.

Somantri dan Muhidin, S. A. 2006. *Aplikasi Statistika dalam Penelitian*. Pustaka Ceria, Bandung.

Upadhyaya, L. N. and Singh, H. P. 1999. Use of Transformed Auxiliary Variable in Estimating the Finite Population Mean. *Biometrical Journal **41**. 627-636.*

Wahyuni, Y. 2011. *Dasar – Dasar Statistik Deskriptif* . Cetakan I. Nuhamedika, Yogyakarta.

Yamane, T. 1967. *Elementary sampling Theory*. Prentice Hall, USA.