GRAPH GRABBING GAME PADA GRAF LINTASAN P_n DENGAN n GANJIL

Margareta Octavianingrum
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
email: margaretaocta1407@gmail.com

ABSTRAK

Diberikan graf terhubung G dengan setiap simpul v dari graf G memiliki bobot berupa bilangan bulat tak negatif, yaitu w(v). Dalam permainan Graf Grabbing Game, terdapat dua pemain, yaitu Alice dan Bob, dimana Alice adalah pemain pertama. Permainan dilakukan dengan cara setiap pemain secara bergantian mengambil satu simpul dalam graf G dengan ketentuan bahwa simpul yang diambil bukan merupakan cut vertex, artinya, setelah simpul v diambil, graph G − v, tetap merupakan graf terhubung. Pemenang permainan adalah pemain yang memiliki jumlah bobot terbanyak setelah semua simpul diambil. Dalam literatur, Alice selalu memenangkan permainan untuk graf lintasan P_n*, dengan genap, tetapi tidak selalu menang untuk n ganjil. Artikel ini membahas kriteria yang harus dipenuhi untuk pelabelan graf lintasan* P_n *dengan* n *ganjil yang memberikan kepastian kemenangan kepada Alice. Penelitian ini merupakan penelitian pustaka. Hasil penelitian ini adalah Alice akan memenangkan graph grabbing game untuk graf lintasan* P_n *dengan* n *ganjil jika terdapat simpul ujung* $u \in V(P_n)$ *dengan* $w(u) > w_{max}(P_n - u) - w_{min}(P_n - u)$.

Kata Kunci: *graph grabbing game, graf lintasan, graf terbobot*

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang banyak diterapkan untuk memecahkan masalah di kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang ilmu dalam matematika yang sering diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Teori graf banyak digunakan untuk permasalahan yang berkaitan dengan jejaring atau *networking*. Di dalam perjalanan waktu, teori graf berkembang tidak hanya karena ada permasalahan konkret yang harus diselesaikan. Tidak jarang teori graf berkembang melalui permasalahan dalam permainan.

Awal mula persoalan *Gold Grabbing Game* dalam teori graf berawal dari permainan pada awal abad ke-21 dengan permasalahan yang dipublikasikan oleh Winkler[1], yaitu *Coins in a Row*. Rosenfeld[2]mempublikasikan sebuah *open problem* yang mirip dengan *Coins in a Row* tetapi terkait dengan teori graf. Permainan tersebut diberi nama *Gold Grabbing Game*. Pada tahun 2011, Micek dan Walczak[3] mempublikasikan solusi permainan *Gold Grabbing Game* tetapi dengan sedikit merubah aturan permainan.

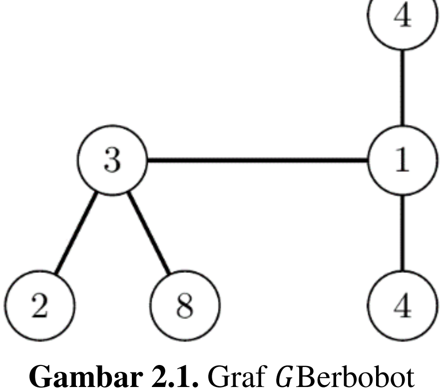
Penelitian-penelitian sebelumnya telah membuktikan bahwa Alice, sebagai pemain pertama, dapat memenangkan *graph grabbing game*untuk beberapa jenis graf tertentu. Seacrest dan Seacrest[4] membuktikan bahwa Alice dapat mengumpulkan setidaknya $\frac{1}{2}$ dari bobot total untuk setiap pohon dengan banyak simpul genap.Acampa[5] merangkum hasil-hasil graph grabbing game pada beberapa jenis graf yang memberikan kepastian untuk kemenangan Alice, antara lain graf lintasan P_n dengan n genap dan graf lengkap K_n. Namun, *graph grabbing game* pada graf lintasan P_n dengan n ganjil tidak memberi jaminan bahwa Alice akan selalu menang.

Berdasarkan hasil pada penelitian-penelitian tersebut, penelitian ini menyelidiki kriteria pelabelan simpul yang harus dipenuhi pada graf lintasan P_n dengan n ganjil yang memberikan kepastian kemenangan kepada Alice. Pada graf lintasan P_n dengan n ganjil, Alice seharusnya diuntungkan dengan mendapatkan satu simpul lebih daripada Bob. Akan tetapi, ia dapat mengalami kekalahan apabila ia tidak dapat mengambil simpul terbesar. Oeh karena itu, kriteria pelabelan yang diperlukan adalah menentukan pelabelan untuk simpul-simpul yang memiliki kemungkinan tidak dapat diambil oleh Alice.

2. KAJIAN LITERATUR

A. Graph Grabbing Game

Misalkan G adalah sebuah graf sedemikian sehingga setiap simpul v dari graf G memiliki bobot berupa bilangan bulat tak negatif, yaitu $w(v)$. Ada dua pemain, yaitu Alice dan Bob, dimana Alice merupakanpemain pertama. Permainan dilakukan dengan cara setiap pemain secara bergantian mengambil simpul terbobot dalam graf G tersebut. Simpul yang telah diambil dikeluarkan dari graf. Aturan permainan adalah graf yang tersisa, graf $G - v,$ setiap kali simpul diambil haruslah graf terhubung. Dengan kata lain, pemain tidak boleh mengambil simpul (*cut vertex*) yang akan memotong graf menjadi dua komponen. Pemenang permainan ditentukan dengan jumlah bobot (poin) terbanyak ketika semua simpul telah diambil. Alice dinyatakan sebagai pemenang permainan jika dia mendapat setidaknya setengah dari bobot total graf, dan jika sebaliknya, maka Bob yang menang[3].



Gambar 2.1. Graf GBerbobot

Sebagai ilustrasi, perhatikan graf yang ditampilkan pada Gambar 2.1. Pada graf G tersebut, sebagai pemain pertama, Alice dapat mengambil simpul apa pun kecuali simpul dengan bobot 1 dan 3. Hal tersebut dikarenakan simpul dengan bobot 1 dan 3 merupakan simpul potong (*cut vertex*). Permainan *Gold Grabbing Game*pada graf ini tidak perlu memakan waktu lama untuk menebak siapa yang akan menang dan bagaimana caranya. Alice dapat mengambil simpul dengan bobot 8 pada langkah pertama, dan dengan begitu Alice sudah dapat dipastikan akan memenangkan permainan. Total bobot simpul pada graf G adalah 22 sehingga Alice maupun Bob hanya perlu mengumpulkan 12 poin untuk menang atau setidaknya 11 poin untuk hasil seri. Alice hanya perlu mengumpulkan sedikitnya dua simpul untuk menang yaitu simpul berbobot 8 dan setelahnya simpul berbobot 4 atau dua simpul lain yang memiliki jumlah bobot setidaknya 3. Jadi pada graf Gdengan pelabelan simpul ini, Alice menang.

B. Graf Lintasan

Graf lintasan adalah sebuah graf terhubung dengan$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Graf lintasan yang memiliki n simpul dilambangkan dengan P_n[6].

Gambar 2.2. Graf Lintasan P_5

Gambar 2.2menyajikan sebuah graf lintasan P_5dengan himpunan simpul $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$. Karena banyak simpul pada graf tersebut adalah 5,maka ditulis sebagai graf lintasan P_5.

C. Graph Grabbing Game pada Graf Lintasan P_n dengan n Genap

Sebelum membahas graf lintasan P_n untuk n ganjil, perlu dibahas secara singkat Graph Grabbing Game untuk graf lintasan dengan n genap yang didiskusikan dalam [5].

Teorema 2.1

Misalkan P_n adalah sebuah graf lintasan dengan n genap. Alice dapat memenangkan permainan tersebut[5].

Bukti

Lintasan P_n diwarnai dengan dua warna simpul, katakan hitam dan putih. Entah itu simpul hitam atau putih harus mengandung setidaknya setengah dari bobot total graf. Karena P_n adalah lintasan dengan simpul genap, maka masing-masing simpul akhirnya akan memiliki warna tersendiri. Alice cukup memilih simpul dengan warna yang setidaknya berbobot setengah dari bobot total. Kemudian Bob hanya bisa mengambil sebuah simpul dari warna yang berbeda. Ulangi proses ini sampai semua simpul telah dipilih. Alice akan mengumpulkan semua simpul warna yang dipilihnya dan dengan demikian, setidaknya setengah dari bobot total.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian pustaka. Peneliti menggunakan definisi*graph grabbing game* dan teorema *graph grabbing game* pada graf lintasan P_n dengan n genap yang sudah dibuktikan sebelumnya. Peneliti membuat dugaan untuk *graph grabbing game* pada graf lintasan P_n dengan n ganjil kemudian membuat pembuktian terhadap dugaan tersebut.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 4. 1

Diberikan graf lintasan berbobot P_n dengan n bilangan bulat genap. Selanjutnya dilakukan pengurutan terhadap bobot-bobot simpul graf tersebut dari nilai yang terkecil hingga yang terbesar. Berdasarkan pengurutan tersebut, simpul-simpul diberi label $v_1, v_2, \dots, v_n$. Didefinisikan

$$w_{min}(P_n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} w(v_i)$$

$$w_{max}(P_n) = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} w(v_i)$$

Gambar 4.1. Graf Lintasan P_4Berbobot

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 4.1.Bobot-bobot pada graf lintasan P_4tersebut diurutkan dari nilai yang terkecil hingga terbesar dan didapat barisan 1,3,5,6. Selanjutnya simpul berbobot 1 diberi label v_1, simpul berbobot 3 diberi label v_2, simpul berbobot 5 diberi label v_3, dan simpul berbobot 6 diberi label v_4. Menurut definisi 4.1, maka nilai w_{min} dan w_{max}dari graf lintasan P_4 tersebut adalah

$$w_{min} = \sum_{i=1}^{2} w(v_i) = 1 + 3 = 4$$

$$w_{max} = \sum_{i=3}^{4} w(v_i) = 5 + 6 = 11$$

Definisi 4. 2

Simpul-simpul ujung graf P_n adalah $v \in V(P_n)$ dengan $d(v) = 1$.

Sesuai dengan Definisi 4.2, simpul-simpul ujung pada graf lintasan P_4dalam Gambar 4.1 adalah simpul berbobot 1 dan simpul berbobot 3.Derajat kedua simpul tersebut adalah 1.

Teorema 4. 1

Diberikan graf P_n dengan n adalah bilangan ganjil dan $n \geq 3$. Alice akan memenangkan graph grabbing game jika terdapat simpul ujung $u \in V(P_n)$ dengan $w(u) > w_{max}(P_n - u) - w_{min}(P_n - u)$.

Bukti

Misalkan graf lintasan P_n dengan n ganjil memiliki simpul ujung u dengan $w(u) \geq w_{max}(P_n - u) - w_{min}(P_n - u)$. Karena mendapat giliran pertama, Alice dapat mengambil simpul u tersebut. Akibatnya graf yang tersisa setelah pengambilan pertama adalah graf P_{n-u} yang merupakan graf lintasan dengan banyak simpul genap.

Berdasarkan Teorema 2.1, Bob akan memenangkan pertandingan untuk subgraf lintasanP_{n-u} karena memiliki simpul genap. Lebih lanjut, total bobot yang dikumpulkan oleh Bob adalah $T_{Bob} \leq w_{max}(P_n - u)$.

Dengan demikian, untuk graf lintasan P_n, total bobot yang dikumpulkan oleh Alice adalah

$$T_{Alice} \geq w_{min}(P_n - u) + w(u)$$

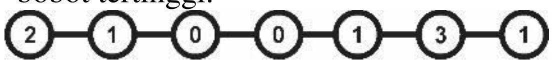
Karena $w(u) > w_{max}(P_n - u) - w_{min}(P_n - u)$, maka diperoleh $T_{Alice} > w_{max}(P_n - u) \geq T_{Bob}$.

Alice menang. □

Gambar 4.2. Graf Lintasan P_7Berbobot

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 4. 2.Pada langkah pertama Alice tentu saja akan memilih simpul ujung dengan bobot terbesar, yaitu simpul dengan bobot 6. Giliran Bob, ia tentu akan mengambil simpul ujung di sisi lain dengan bobot 3 dibandingkan simpul berbobot 2. Pada giliran selanjutnya, Alice dapat memilih salah satu simpul berbobot 2 begitu pula Bob akan mengambil simpul berbobot 2 lainnya. Pada akhirnya tersisa tiga simpul dan Alice hanya dapat mengambil simpul berbobot 1 kemudian simpul berbobot 0 pada giliran terakhir. Hal ini dikarenakan Alice tidak dapat mengambil simpul berbobot 4 yang merupakan *cut vertex*. Pada perolehan akhir, poin Bob adalah $3 + 2 + 4 = 9$. Sedangkan poin akhir Alice adalah $6 + 2 + 1 + 0 = 9$. Alice menang dengan mendapat setengah dari bobot total graf lintasan P_7 terbobot tersebut.

Perhatikan bahwa u pada graf lintasan P_7 terbobot di atas adalah simpul ujung dengan bobot 6, dimana $6 \geq (4 + 3 + 2) - (2 + 1 + 0)$. Apabila $w(u) \leq 6$, Alice tentu tidak dapat mengimbangi perolehan skor Bob karena ia tidak dapat mengamankan *cut vertex* yang memiliki bobot tertinggi.



Gambar 4.3. Graf Lintasan P_7Berbobot

Pada gambar 4. 3 tersebut, Alice dapat memilih simpul ujung dengan bobot terbesar, yaitu simpul dengan bobot 2. Giliran Bob, ia akan mengambil simpul yang bertetangga dengan simpul yang dipilih Alice sebelumnya daripada simpul ujung di bagian lain. Meskipun bobot kedua simpul sama, tetapi Bob tidak akan membiarkan Alice mendapatkan simpul berbobot 3 jika ia mengambil simpul ujung di bagian lain. Jika strategi keduanya ingin mendapatkan bobot tertinggi, maka dua giliran selanjutnya Alice dan Bob hanya akan mengambil simpul berbobot 0. Pada akhirnya tersisa tiga simpul dan Alice hanya dapat mengambil simpul-simpul berbobot 1. Hal ini dikarenakan Alice tidak dapat mengambil simpul berbobot 3 yang merupakan *cut vertex*. Pada perolehan akhir, poin Bob adalah $1 + 0 + 3 = 4$. Sedangkan poin akhir Alice adalah $2 + 0 + 1 + 1 = 4$. Alice menang dengan mendapat setengah dari bobot total graf lintasan P_7 terbobot tersebut.

Perhatikan bahwa pada Gambar 4.3, kedua simpul ujungnya tidak memenuhi kriteria pada Teorema 4.1 namun Alice tetap dapat memenangkan permainan. Hal ini tidak berarti bahwa jika suatu graf lintasan P_n dengan n ganjil tidak memenuhi kriteria pada Teorema 4.1, maka Alice akan kalah. Pada dasarnya pemberian bobot u yang demikian adalah cara untuk menghindarkan Alice dari ketidakberhasilan mengumpulkan setengah dari total bobot untuk $P_n - u$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, hasil penelitian dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Pengurutan bobot pada graf lintasan berbobot P_n dengan n bilangan bulat genap.
   Diberikan graf lintasan berbobot P_n dengan n bilangan bulat genap. Selanjutnya dilakukan pengurutan bobot-bobot graf tersebut dari nilai yang terkecil hingga yang terbesar. Berdasarkan pengurutan tersebut, simpul-simpul diberi label $v_1, v_2, \dots, v_n$. Didefinisikan
$$w_{min}(P_n) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} w(v_i)$$
$$w_{max}(P_n) = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} w(v_i)$$
2. Kriteria pelabelan pada graf lintasan berbobot P_n.
   Diberikan graf P_n dengan n adalah bilangan ganjil dan $n \geq 3$. Alice akan memenangkan *graph grabbing game* jika terdapat simpul ujung $u \in V(P_n)$ dengan $w(u) > w_{max}(P_n - u) - w_{min}(P_n - u)$.

6. REFERENSI

[1] P. Winkler, *Mathematical Puzzles A Connoisseur's Collection*. Massachuetts: A K Peter, 2004.
[2] M. Rosenfeld, "A gold-grabbing game | Open Problem Garden," 2009. [Online]. Available: http://garden.irmacs.sfu.ca/op/a_gold_grabbing_game. [Accessed: 23-Feb-2020].
[3] P. Micek and B. Walczak, "A graph-grabbing game," *Comb. Probab. Comput.*, vol. 20, no. 4, pp. 623–629, 2011, doi: 10.1017/S0963548311000071.
[4] D. E. Seacrest and T. Seacrest, "Grabbing the gold," *Discrete Math.*, vol. 312, no. 10, pp. 1804–1806, 2012, doi: 10.1016/j.disc.2012.01.010.
[5] S. Acampa, "Results on the Gold Grabbing Game," Eastern Kentucky University, 2018.
[6] R. J. Wilson, *Pengantar Teori Graf*, 5th ed. Jakarta: Erlangga, 2010.